$2^η$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

11.

Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=25$ και οι εφαπτόμενες σ' αυτόν από το σημείο $M(0,\ -10)$. Αν A και B είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε

i) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων

ii) Τις συντεταγμένες των σημείων A και B

iii) Την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα A και B.

Προτεινόμενη λύση

i)

Ο κύκλος $x^2+y^2=25$ έχει κέντρο $O(0,\ 0)$ και ακτίνα $\rho=5$.

Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $M(0,\ -10)$ έχουν εξισώσεις της μορφής

$x=0$ ή $y+10=\lambda(x-0)$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ ή $y=\lambda x-10$

$x=0$ ή $\lambda x-y-10=0$

- Η ευθεία $x=0$ δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου, αφού διέρχεται από το κέντρο του.
- Η ευθεία $(\varepsilon):\ \lambda x-y-10=0$ είναι εφαπτόμενη $\Leftrightarrow$ $d(O,\ \varepsilon)=\rho$

$$\frac{|0\cdot x-0-10|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=5$$

$$10=5\sqrt{\lambda^2+1}$$

$$100=25(\lambda^2+1)$$

$$\lambda^2+1=4 \Leftrightarrow$$

$$\lambda=-\sqrt{3} \quad ή \quad \lambda=\sqrt{3}$$

Επομένως $(\varepsilon):\ y=-\sqrt{3}x-10$ ή $y=\sqrt{3}x-10$

ii)

Λύνοντας το σύστημα των $x^2+y^2=25$ και $y=-\sqrt{3}x-10$ βρίσκουμε

$x=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ και $y=-\dfrac{5}{2}$.

Επομένως το ένα σημείο επαφής είναι το $A\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$

Ενώ λύνοντας το σύστημα των $x^2+y^2=25$ και $y=\sqrt{3}x-10$ βρίσκουμε

$x=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ και $y=-\dfrac{5}{2}$.

Επομένως το άλλο σημείο επαφής είναι το $B\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$

iii)

Επειδή τα σημεία $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\right)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, η ζητούμενη παραβολή πρέπει να έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y , άρα η εξίσωσή της θα είναι της μορφής $x^2 = 2py$

Και επειδή διέρχεται από το $A\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{5}{2}\right)$ θα είναι $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2p\left(-\frac{5}{2}\right)$

$$\frac{75}{4} = -5p$$

$$p = -\frac{15}{4}$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 = -\frac{15}{2}y$

12.

i) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα των παραβολών

$x = -\frac{1}{48}y^2$ και $x^2 = 24y$

ii) Να βρείτε τις εστίες και τα μήκη των αξόνων των ελλείψεων

$16x^2 + 25y^2 = 400$ και $4x^2 + y^2 = 4$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $16x^2 + 9y^2 = 144$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η παραβολή $x = -\frac{1}{48}y^2 \Leftrightarrow y^2 = -48x$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των x με $2p = -48 \Leftrightarrow p = -24$

Οπότε εστία της παραβολής είναι το σημείο $E\left(\frac{p}{2},\ 0\right) = E(-12,\ 0)$

και διευθετούσα η ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{p}{2} = 12$

Η παραβολή $x^2 = 24y$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y , με $2p = 24 \Leftrightarrow p = 12$.

Οπότε εστία της παραβολής είναι το σημείο $E\left(0,\ \frac{p}{2}\right) = E(0,\ 6)$

και διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = -6$

ii)

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε $16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Άρα η έλλειψη έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
και επειδή $25 > 16$ οι εστίες είναι σημεία του άξονα των x .

$\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$

Ο μεγάλος άξονας είναι $2\alpha = 10$ και ο μικρός $2\beta = 8$.

Οι εστίες είναι $E'(-\gamma,\ 0) = E'(-3,\ 0)$ και $E(\gamma,\ 0) = E(3,\ 0)$

Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε $4x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Οπότε η έλλειψη έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
και επειδή $4 > 1$, οι εστίες είναι στον άξονα των y.

$\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 3 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{3}$

Ο μεγάλος άξονας είναι $2\alpha = 4$ και ο μικρός $2\beta = 2$.

Οι εστίες είναι $E'(0,\ -\gamma) = E'(0,\ -\sqrt{3})$ και $E(0,\ \gamma) = E(0,\ \sqrt{3})$

iii)

Για την έλλειψη έχουμε $16x^2 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$, $\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$

$9 < 16$ άρα εστίες στον άξονα των y.

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow \gamma = \sqrt{7}$, οπότε $E'(0, -\sqrt{7})$ και $E(0, \sqrt{7})$.

Η ζητούμενη ισοσκελής υπερβολή θα έχει εξίσωση της μορφής

$y^2 - x^2 = \alpha_1^2$, όπου $\alpha_1 = \beta_1$ και $\gamma_1 = \sqrt{7}$

Αλλά $\beta_1^2 = \gamma_1^2 - \alpha_1^2 \Leftrightarrow 2\alpha_1^2 = 7 \Leftrightarrow \alpha_1^2 = \frac{7}{2}$

Επομένως η ζητούμενη υπερβολή θα έχει εξίσωση $y^2 - x^2 = \frac{7}{2}$

13.

Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$,δείξτε ότι οι αριθμοί **i)** $\frac{\alpha^3 + 5\alpha}{3}$ και **ii)** $\frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 - 13\alpha}{3}$ είναι ακέραιοι .

Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι $\alpha = 3\pi$ ή $\alpha = 3\pi + 1$ ή $\alpha = 3\pi + 2$ με $\pi \in \mathbb{Z}$

- Όταν $\alpha = 3\pi$

  $$\frac{\alpha^3 + 5\alpha}{3} = \frac{27\pi^3 + 15\pi}{3} = \frac{3(9\pi^3 + 5\pi)}{3} = (9\pi^3 + 5\pi) \in \mathbb{Z}$$

- Όταν $\alpha = 3\pi + 1$

  $$\frac{\alpha^3 + 5\alpha}{3} = \frac{27\pi^3 + 27\pi^2 + 9\pi + 1 + 15\pi + 5}{3}$$
  $$= \frac{27\pi^3 + 27\pi^2 + 24\pi + 6}{3}$$
  $$= \frac{3(9\pi^3 + 9\pi^2 + 8\pi + 2)}{3} = (9\pi^3 + 9\pi^2 + 8\pi + 2) \in \mathbb{Z}$$

- Όταν $\alpha = 3\pi + 2$

  Ομοίως

ii)

$$\frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 - 13\alpha}{3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 - 13\alpha + 5\alpha - 5\alpha}{3} = \frac{\alpha^3 + 5\alpha + 6\alpha^2 - 18\alpha}{3}$$
$$= \frac{\alpha^3 + 5\alpha}{3} + \frac{3(2\alpha^2 - 9\alpha)}{3}$$

$$= \frac{\alpha^3 + 5\alpha}{3} + (2\alpha^2 - 9\alpha)$$

$$\overset{(i)}{=} \text{ ακέραιος}$$

14.

Η παραβολή $y^2 = \alpha x$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$.

i) Να δείξετε ότι εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(2, 0)$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας – χορδής της παραβολής η οποία έχει μέσο το σημείο $M(1, 3)$

iii) Έστω E' το συμμετρικό της εστίας ως προς τον άξονα $y'y$. Αν $M(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EE'}$, να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

iv) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το A .

Προτεινόμενη λύση

i)

Το A ανήκει στην παραβολή $\Leftrightarrow$ $4^2 = 2\alpha$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = 8$

Επομένως η εξίσωση της παραβολής γίνεται $y^2 = 8x$ με $2p = 8$ $\Leftrightarrow$ $p = 4$,

οπότε εστία της παραβολής είναι το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = E(2, 0)$

ii)

Έστω AB η ζητούμενη χορδή.

Τότε $y_A^2 = 8x_A$ και $y_B^2 = 8x_B$

Αφαιρούμε κατά μέλη : $y_B^2 - y_A^2 = 8x_B - 8x_A$ $\Leftrightarrow$

$$(y_B - y_A)(y_B + y_A) = 8(x_B - x_A) \quad \mathbf{(1)}$$

M (1, 3) μέσο της χορδής AB $\Leftrightarrow$ $3 = \frac{y_B + y_A}{2}$ $\Leftrightarrow$ $y_B + y_A = 6$

Η (1) γίνεται $(y_B - y_A)6 = 8(x_B - x_A)$

$$(y_B - y_A)3 = 4(x_B - x_A) \quad \mathbf{(2)}$$

- Για $x_B = x_A$ η (2) $\Leftrightarrow$ $(y_B - y_A)6 = 0$ $\Leftrightarrow$ $y_B = y_A$
  Οπότε τα σημεία A, B συμπίπτουν που είναι άτοπο.
- Για $x_B \neq x_A$ η (2) $\Leftrightarrow$ $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_{AB} = \frac{4}{3}$

  Άρα AB : $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 1)$ $\Leftrightarrow$ $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

iii)

Είναι $E'(-2, 0)$ οπότε $\overrightarrow{ME} = (-2 - x, -y)$ και $\overrightarrow{EE'} = (-4, 0)$.

$\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EE'}$ $\Leftrightarrow$ $|\overrightarrow{ME}|^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EE'}$

$$(-2 - x)^2 + (-y)^2 = (-2 - x)(-4) + (-y).0$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 8 + 4x$$

$x^2 + y^2 = 4$ που είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

iv)

Έστω $P(x_1 , y_1)$ σημείο επαφής.

Τότε η εφαπτομένη θα είναι $xx_1 + yy_1 = 4$ **(3)**

Η εφαπτομένη διέρχεται από το $A(2, 4)$ $\Rightarrow$ $2x_1 + 4y_1 = 4$ **(4)**

Το σημείο (x_1 , y_1) ανήκει στον κύκλο $\Rightarrow$ $x_1^2 + y_1^2 = 4$ **(5)**

Λύνοντας το σύστημα των (4), (5) βρίσκουμε $x_1 = 2$ και $y_1 = 0$ ή

$x_1 = -\frac{6}{5}$ και $y_1 = \frac{8}{5}$

Η (3) γίνεται $x = 2$ ή $-\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y = 4$ $\Leftrightarrow$

$x = 2$ ή $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

15.

i) Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x-3)+(y-3)(y-5)=0$. Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

ii) Να αποδείξετε ότι από τα σημεία $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $\Gamma(3, 5)$ και $\Delta(1, 5)$ διέρχεται ένας κύκλος, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

iii) Ένα αυτοκίνητο Μ κινείται στο επίπεδο των σημείων A, B, Γ, Δ του (ii) και για κάθε χρονική στιγμή t, $t>0$ η θέση του είναι το σημείο $M(t, t+2)$. Να βρείτε αν η γραμμή στην οποία κινείται το αυτοκίνητο συναντά τον κύκλο και αν ναι , σε ποια σημεία.

Προτεινόμενη λύση

i)

$(x-1)(x-3)+(y-3)(y-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-4x-8y+18=0 \quad \textbf{(1)}$

Η (1) είναι εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με

$$A^2+B^2-4\Gamma = 16+64-72=8>0$$

άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(2, 4)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

ii)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι συντεταγμένες των A , B, Γ, Δ επαληθεύουν την εξίσωση του **(i)** ερωτήματος, επομένως ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση

$$x^2+y^2-4x-8y+18=0$$

iii)

Έστω $M(x, y)$ τυχαία θέση του αυτοκίνητου τότε $x=t$ και $y=t+2$

Απαλείφοντας το t από τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε $y=x+2$.

Άρα το αυτοκίνητο κινείται στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=x+2 \quad \Leftrightarrow$

$$x-y+2=0$$

iv)

Η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από την ευθεία (ε) είναι

$d(K, \varepsilon) = \frac{|2-4+2|}{\sqrt{1+1}} = 0$, άρα η (ε) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και επομένως τον τέμνει.

Λύνοντας το σύστημα $(x^2+y^2-4x-8y+18=0$ και $y=x+2)$

βρίσκουμε $(x=1$ και $y=3)$ ή $(x=3$ και $y=5)$

Επομένως η ευθεία στην οποία κινείται το αυτοκίνητο τέμνει τον κύκλο στα σημεία $(1, 3)$ και $(3, 5)$ δηλαδή στα Α και Γ .

16.

Έστω οι ακέραιοι α, β, γ. Δείξτε ότι

i) Αν $\alpha \mid \beta$ τότε $\alpha \mid \lambda\beta$

ii) Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$ τότε $\alpha \mid (\beta + \gamma)$

iii) Αν $3 \mid (\alpha + 8)$ και $3 \mid (17 - \beta + 3\delta)$ τότε $3 \mid (\alpha + \beta)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha \mid \beta \Rightarrow$ υπάρχει ακέραιος κ τέτοιος $\beta = \kappa\alpha$

$\lambda\beta = (\lambda\kappa)\alpha$

$\alpha \mid \lambda\beta$

ii)

$\alpha \mid \beta \Rightarrow \beta = \kappa\alpha$

$\alpha \mid \gamma \Rightarrow \gamma = \lambda\alpha$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $\beta + \gamma = (\kappa + \lambda)\alpha \Rightarrow \alpha \mid (\beta + \gamma)$

iii)

$3 \mid (\alpha + 8) \Rightarrow \alpha + 8 = 3\mu$ **(1)**

$3 \mid (17 - \beta + 3\delta) \Rightarrow 17 - \beta + 3\delta = 3\nu \Rightarrow \beta = 17 + 3\delta - 3\nu$ **(2)**

$(1) + (2) \Rightarrow \alpha + \beta = 3\mu + 3\delta - 3\nu + 9$

$= 3(\kappa + \delta - \lambda + 3) = 3\sigma$, άρα $3 \mid (\alpha + \beta)$

17.

Δίνεται η υπερβολή $9x^2 - 16y^2 = 144$ και το σημείο της $A(\lambda,\ \mu)$, με $\lambda \neq \pm 5$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AE και AE΄ όπου E, E΄ οι εστίες της υπερβολής.

ii) Να βρείτε τα σημεία A για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$9x^2 - 16\psi^2 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\alpha^2 = 16$, $\beta^2 = 9$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

$9 = \gamma^2 - 16$

$\gamma = 5$

Άρα οι εστίες της υπερβολής είναι $E'(-5,\ 0)$, $E(5,\ 0)$

$$\lambda_{AE} = \frac{-\mu}{5-\lambda} \quad \text{άρα} \quad AE:\ y - 0 = \frac{-\mu}{5-\lambda}(x-5) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-\mu}{5-\lambda}x + \frac{5\mu}{5-\lambda}$$

$$\lambda_{AE'} = \frac{-\mu}{-5-\lambda} = \frac{\mu}{5+\lambda} \quad \text{άρα} \quad AE':\ y - 0 = \frac{\mu}{5+\lambda}(x+5) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\mu}{5+\lambda}x + \frac{5\mu}{5+\lambda}$$

ii)

$$AE' \perp AE \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-\mu}{5-\lambda} \cdot \frac{\mu}{5+\lambda} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = 25 - \lambda^2. \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή το $A(\lambda,\ \mu)$ ανήκει στην υπερβολή θα είναι και $9\lambda^2 - 16\mu^2 = 144$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\mu = \pm\dfrac{9}{5}$ και $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{544}}{5}$

Οπότε $A\left(\dfrac{\sqrt{544}}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$ ή $A\left(\dfrac{\sqrt{544}}{5},\ -\dfrac{9}{5}\right)$ ή

$A\left(-\dfrac{\sqrt{544}}{5},\ -\dfrac{9}{5}\right)$ ή $A\left(-\dfrac{\sqrt{544}}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)$

18.

Έστω η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$ και η υπερβολή $x^2 - 2y^2 = 2$.

i) Δείξτε ότι έχουν τις ίδιες εστίες

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο γραμμών

iii) Να δείξτε ότι οι εφαπτόμενες των δύο γραμμών στα σημεία τομής τους είναι κάθετες

Προτεινόμενη λύση

i)

Η έλλειψη γράφεται $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ και η υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$

Για την έλλειψη έχουμε : $4 > 1$, άρα οι εστίες της ανήκουν στον άξονα $x'x$

$\alpha = 2$ και $\beta = 1$

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow 1 = 4 - \gamma^2$

$\gamma^2 = 3$

$\gamma = \sqrt{3}$

Για την υπερβολή έχουμε : Τις εστίες να ανήκουν στον άξονα $x'x$

$\alpha_1 = \sqrt{2}$ και $\beta_1 = 1$

$\beta_1^2 = \gamma_1^2 - \alpha_1^2 \Leftrightarrow 1 = \gamma_1^2 - 2$

$\gamma_1^2 = 3$

$\gamma_1 = \sqrt{3}$

Οπότε οι δύο κωνικές έχουν τις ίδιες εστίες .

ii)

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο γραμμών λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους $(x^2 + 4y^2 = 4$ και $x^2 - 2y^2 = 2)$

Οπότε $x = \pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ και $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Επομένως τα σημεία τομής είναι $A\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Gamma\left(-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\Delta\left(-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

iii)

Εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο A (ε_1) : $\frac{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x}{4} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}y}{1} = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}y = 4$

$\sqrt{8}\,x + 4y = 4\sqrt{3}$

με $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{8}}{4}$

Εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο A (ε_2) : $\frac{\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}y}{1} = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}y=2$$
$$\sqrt{8}\,x-2y=2\sqrt{3}$$
$$\text{με}\quad \lambda_2=-\frac{\sqrt{8}}{-2}=\frac{\sqrt{8}}{2}$$

Οπότε $\lambda_1\lambda_2=-\frac{\sqrt{8}}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{2}=-\frac{8}{8}=-1 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_1\perp\varepsilon_2$

19.

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha}\,\widehat{\ }\,\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{\upsilon}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{\nu}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε

i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ii) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\nu}$

iii) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nu}$

iv) Το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\upsilon}$ και $\vec{\nu}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\vec{\alpha}\,\widehat{\ }\,\vec{\beta})=1\cdot2\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3}=1\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1$$

ii)

$$|\vec{\upsilon}|^2=|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|^2=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2$$
$$=4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2$$
$$=4|\vec{\alpha}|^2+12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9|\vec{\beta}|^2$$
$$=4\cdot1+12\cdot1+9\cdot4=52 \qquad \text{άρα}\quad |\vec{\upsilon}|=\sqrt{52}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $|\vec{\nu}|=\sqrt{13}$

iii)

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nu}=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}-6\vec{\beta}^2$$
$$=2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}-6|\vec{\beta}|^2$$
$$=2-1-6\cdot4=-23$$

iv)

$$\text{συν}(\vec{\upsilon}\,\widehat{\ }\,\vec{\nu})=\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nu}}{|\vec{\upsilon}||\vec{\nu}|}=\frac{-23}{\sqrt{52}\sqrt{13}}=\frac{-23}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=-\frac{23}{26}$$

20.

i) Δείξτε ότι για κάθε φυσικό ν με $\nu \geq 3$ ισχύει $3^{\nu} > (\nu+1)^2$

ii) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2\nu-1)^3 = \nu^2(2\nu^2-1)$

iii) Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $3^{3\nu} + 51 =$ πολ26

Προτεινόμενη λύση

i)

Ελέγχουμε αν ισχύει για $\nu = 3$: $3^3 > (3+1)^2$ έχουμε

$27 > 16$ που ισχύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu = \kappa > 3$, δηλαδή ότι $3^{\kappa} > (\kappa+1)^2$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι $3^{\kappa+1} > (\kappa+2)^2$

(1) $\Rightarrow$ $3.3^{\kappa} = 3.3^{\kappa}$ $\Rightarrow$ $3^{\kappa+1} > 3(\kappa+1)^2$

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $3(\kappa+1)^2 > (\kappa+2)^2$

$3\kappa^2 + 6\kappa + 3 > \kappa^2 + 4\kappa + 4$

$2\kappa^2 + 2\kappa - 1 > 0$ που ισχύει αφού $\kappa > 3$

ii)

Ελέγχουμε αν ισχύει για $\nu = 1$: $1^3 = 1^2(2-1)$

$1 = 1$ που ισχύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή ότι

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2\kappa-1)^3 = \kappa^2(2\kappa^2-1)$ **(2)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2\kappa-1)^3 + [2(\kappa+1) - 1]^3 = (\kappa+1)^2[2(\kappa+1)^2 - 1] \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$\kappa^2(2\kappa^2-1) + [2(\kappa+1) - 1]^3 = (\kappa+1)^2[2(\kappa+1)^2 - 1$

πράξεις

ισχύει

iii)

Ελέγχουμε αν ισχύει για $\nu = 1$: $3^{3.1} + 51 =$ πολ26

$27 + 51 =$ πολ26

$78 =$ πολ26 που ισχύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλαδή ότι $3^{3\kappa} + 51 =$ πολ26 $= 26\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$ **(3)**

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή ότι $3^{3(\kappa+1)} + 51 =$ πολ26

1^{o} μέλος $= 3^{3(\kappa+1)} + 51 = 3^{3\kappa+3} + 51$

$= 3^{3\kappa} \cdot 3^3 + 51$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3)}{=} (26\mu - 51)\cdot 27 + 51\\
&= 26\cdot 27\mu - 51\cdot 27 + 51\\
&= 26\cdot 27\mu - 51\cdot 26\\
&= 26(27\mu - 51) = \pi o\lambda 26
\end{aligned}
$$